

# Matematičko modelovanje

- U ovoj zbirci zadataka moguće su greške i mole se studenti koji ih uopće da ih prijave. Obratite pažnju da se mnogi zadaci mogu rešiti sa više modela. -

## 1 Uvod

Matematički modeli:

- Modeli osnovnih računskih operacija,
- Logičko-kombinatorni modeli,
- Aritmetičko-logički zadaci,
- Geometrijski modeli rešavanja problema,
- Modelovanje na kvadratnoj mreži,
- Modelovanje geometrijskih problema,
- Modeli problema merenja, vaganja, preliivanja, presipanja, prenošenja i prevoženja,
- Modeli stohastičkih pojava.

”Metoda modela koristi simbolički matematički model, što podrazumeva da se svaki matematički zadatak, iz jezičke, prevodi u matematičku formu, izražava matematičkom simbolikom i rešava primenom matematičkih operacija i relacija” (Milinković<sup>1</sup>, 2013.)

1. U jednoj pekari prvog dana prodato je 232 peciva. Drugog dana za 71 više nego prvog dana, dok je trećeg dana prodato za 122 više nego prvog i drugog dana zajedno. Koliko je peciva prodato u pekari za ova tri dana?
2. Biciklista je presao 37 km, to je za 5 km više od polovine puta. Kolika je dužina celog puta?
3. Pre 10 godina Nikola je imao trećinu sadašnjeg broja godina. Koliko godina ima sad?
4. Zbir dva broj je 29, a razlika 5. Odredi te brojeve?
5. Ako stranicu kvadrata povećamo za 2 cm dobićemo novi kvadrat čija je površina za 36 cm<sup>2</sup> veća od površine datog kvadrata. Izračunaj stranicu, obim i površinu datog kvadrata.
6. Ako jednu stranicu kvadrata povećamo za 5 cm, a druga ostane nepromenjena, dobićemo pravougaonik čija je površina za 15 cm već a od površine kvadrata. Odredi obim tako dobijenog pravougaonika.
7. Koliko se dvocifrenih brojeva može zapisati ako su mu obe cifre neparne?
8. U trocifrenom broju cifra stotina je parna, cifra desetica deljiva sa 4, a cifra jedinica je neparna. Koliko ima takvih trocifrenih brojeva?
9. Iz Beograda se u Kragujevac može stići automobilom korišćenjem pet različitih putnih pravaca, a iz Kragujevca se u Niš stiže posredstvom tri razna puta. Na koliko načina automobil može stići iz Beograda u Niš, a da putuje preko Kragujevca?
10. Jedno odeljenje ima 32 učenika, od kojih 18 prima ”Zabavnik”, a 13 je pretplaćeno na ”Dečije novine”. Koliko učenika prima oba lista, ako 8 učenika nije pretplaćeno ni na jedan list?
11. Milan je zamislio neki broj. Prvo ga je umanjio za 2, a potom dobijeni broj uvećao 4 puta. Zatim je tako dobijeni broj uvećao za 3 i rezultat umanjio 5 puta. Na kraju je dobio broj 7. Koji broj je Milan zamislio?
12. Jovan ima isti broj klikera u oba džepa. Ako iz jednog premesti u drugi 3 klikera, koliko je sad više klikera u drugom džepu nego u prvom?
13. Na koliko različitih načina tri dečaka (Luka, Uroš, Sergej) mogu sedeti na zadnje sedište auta?
14. Ako u ponoć pada kiša, može li se kroz 72 sata očekivati sunčano vreme?

<sup>1</sup>Milinković, D. (2013). Metodika matematičkog modelovanja za razrednu nastavu. Filozofski fakultet, Pale.

## 2 Metoda skupova

1. U odeljenju ima ukupno 35 učenika. Od toga njih 20 su članovi sekcije mladih matematičara, 11 su članovi sekcije mladih fizičara, a 10 učenika nisu članovi ni jedne od ovih sekcija. Koliko učenika su članovi i jedne i druge sekcije?
2. Od 60 nastavnika jedne škole njih 30 pije kafu, 22 pije čaj, a 12 pije i kafu i čaj. Ima li nastavnika koji ne piju ni kafu ni čaj? Ako ih ima, koliko ih je?
3. U jednoj školi u osmom razredu ima svega 70 učenika. Od toga 27 učenika su članovi dramske sekcije, 32 pevaju u horu, a 22 su sportisti. U dramskoj sekciji ima 16 članova horske sekcije, u horskoj sekciji ima 6 sportista, a u dramskoj ima 8 sportista. 3 sportista posećuju i dramsku i horsku sekciju. Koliko učenika ukupno ne peva u horu, ne interesuje se za sport i nisu članovi sekcije? Koliko je onih koje interesuje samo sport?
4. U odeljenju od 35 učenika, na kraju polugodišta, bilo je nedovoljnih ocena samo iz tri predmeta i to: iz engleskog 6, iz hemije 7, iz matematike 10 slabih ocena. Samo po dve nedovoljne ocene imaju 6 učenika. Znamo da 4 učenika imaju nedovoljne ocene iz engleskog jezika i hemije, a 3 učenika imaju upisane nedovoljne ocene iz engleskog jezika i matematike. Po tri jedinice imala su 2 učenika.
  - a) Koliko je bilo učenika sa pozitivnim uspehom?
  - b) Koliko je učenika imalo po dve slabe ocene i to iz engleskog i matematike?
  - c) Koliko je učenika imalo samo po jednu slabu ocenu iz kojeg predmeta?
5. U jednoj školi naročito su omiljeni časopisi  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Časopis  $A$  prima 120 učenika, časopis  $B$  prima 90 učenika, a časopis  $C$  prima 180 učenika. Časopis  $A$  i  $C$  primaju 60 učenika, časopis  $A$  i  $B$  prima 16 učenika, a časopis  $B$  i  $C$  primaju 24 učenika. Sva tri časopisa prima 6 učenika. Dva učenika ne primaju nijedan časopis.
  - a) Koliko učenika prima samo časopis  $A$ , koliko samo časopis  $B$ , koliko samo časopis  $C$ ?
  - b) Koliko ima ukupno učenika koji primaju tačno dva časopisa (bilo koja dva od pomenutih)?
  - c) Koliko u toj školi ima učenika?
6. Na jednom savetovanju ustanovljeno je da: 2 učesnika govore francuski, engleski i ruski; 9 učesnika samo francuski i engleski 13 učesnika francuski i ruski; 12 učesnika ruski i engleski 29 učesnika engleski jezik; 6 učesnika samo francuski; 7 učesnika samo ruski. Koliko je učesnika ovog savetovanja, ako se zna da nema učesnika koji ne govori bar jedan od ova tri jezika?
7. U sobi se nalaze ljudi koji znaju bar jedan od tri jezika. Šestorica od njih znaju engleski, šestorica nemački, sedmorica francuski, četvorica znaju engleski i nemački, trojica znaju nemački i francuski, dvojica francuski i engleski, a jedan sva tri pomenuta jezika. Koliko ljudi ima u sobi? Koliko njih zna samo engleski?
8. U jednoj porodici je bilo mnogo dece. Sedmero od njih voli kupus, šestoro krompir, petoro pasulj. Četvoro je volelo kupus i krompir, troje kupus i pasulj, a dvoje krompir i pasulj. Jedno dete je rado jelo i kupus, i krompir i pasulj. Koliko je dece bilo u toj porodici?
9. Svaki od 23 ispitanika gledao je neki od tri dela filma. Prvi i drugi deo gledalo je 5, samo prvi i treći deo 4, a drugi i treći deo 3 ispitanika. Prvi deo je gledalo 15, a samo treći 5 ispitanika. Ako su sva tri dela gledala 2 ispitanika, odredi koliko ispitanika je gledalo: samo drugi deo; drugi deo; treći deo; samo prvi deo?
10. Poslednjih pet godina se organizuje novogodišnja trka. Pravo učešća imaju učenici šestog, sedmog i osmog razreda osnovne škole. Do sada je iz jedne škole učestvovalo 295 učenika šestog, 289 učenika sedmog i 236 učenika osmog razreda. I u šestom i u sedmom razredu učestvovala je 101 učenik, i u sedmom i u osmom 112, a i u šestom i u osmom razredu 124 učenika. Sve tri godine učestvovalo je 73 učenika. Koliko učenika je učestvovalo u ovoj trci?
11. U jednom odeljenju petog razreda svaki od učenika je poslao svoje radove na neki od sledećih konkura: literarni, likovni i matematički. Na literarni konkurs radove je poslalo 19 učenika, na likovni 18, na matematički 14 učenika. Na literarni i likovni konkurs radove je poslalo 11 učenika, na likovni i matematički 8 učenika, a literarni i matematički 4 učenika. Na sva tri konkursa radove je poslalo 3 učenika. Koliko učenika je u tom odeljenju?
12. U odeljenju od 35 učenika, 20 trenira karate, 11 boks, dok se 10 učenika ne bavi ni jednim sportom. Koliko učenika trenira i karate i boks, a koliko samo karate?
13. Ispitivan je određen broj ljudi u kom mestu najradije provodi novogodišnje praznike. Izabrana su tri mesta: Palić, Vrnjačka Banja i Jahorina, a dobijene su sledeće izjave: 6 ljudi voli sva tri mesta, 8 voli Palić i Vrnjačku Banju, 10 voli Pali i Jahorinu, 12 voli Vrnjaku Banju i Jahorinu, 3 vole samo Pali, 5 samo Vrnjačku Banju, a 7 samo Jahorinu. Koliko je ljudi ispitivano? Koje mesto je najomiljenije? A koje je najmanje popularno?
14. Od 28 članova sportskog društva, četvoro uživa u jahanju, kajaku, i šetnji. U dve vrste sportskih aktivnosti uživa po dva člana,  $\frac{1}{4}$  članova uživa samo u jahanju,  $\frac{1}{2}$  članova u kajaku, a ostatak samo u šetnji. Koliko članova sporskog društva uživa samo u šetnji?

### 3 Metoda logike

1. Četiri čoveka igrala su šah 4 sata. Koliko je sati igrao svaki od učesnika?
2. Svaki štap ima dva kraja. Koliko krajeva ima štap i po?
3. 10 vagona voza prešlo je 100 *km*. Koliko je kilometara prešao svaki vagon?
4. Tri čoveka čekala su autobus 3 sata. Koliko je vremena čekao svaki?
5. U svakom uglu sobe nalazi se po jedna mačka i svaka od njih vidi tri mačke. Koliko je bilo mačaka u sobi?
6. Brojevi 3 i 4 su napisani jedan iza drugog. Koji znak treba staviti između njih da se dobije broj veći od 3 a manji od 4?
7. Letvu treba izrezati na šest jednakih delova. Koliko puta treba rezati letvu?
8. Petao, dok stoji na jednoj nozi, težak je 2.5 *kg*. Koliko će kilograma biti težak ako stane na obe noge?
9. Tri brata, Vlada, Saša i Nikola, učila su u različitim razredima jedne škole. Vlada nije bio stariji od Nikole, a Saša nije bio stariji od Vlade. Kažite ime najstarijeg i najmlađeg od njih.
10. Svaka od tri sestre ima brata. Koliko u toj porodici ima dece?

### 4 Metoda duži

1. Sestra i brat imaju zajedno 28 godina. Brat je stariji 4 godine od sestre. Koliko godina ima sestra, a koliko brat?
2. Zbir dva broja je 60. Jedan je tri puta veći od drugog. Odredi te brojeve
3. Razlika dva broja je 36, a ako se veći podeli manjim, dobije se količnik 4. Koji su to brojevi?
4. Razlika dva broja je 53. Ako se veći podeli manjim, dobije se količnik 4 i ostatak 8. Odredi te brojeve.
5. Zbir umanjenika, umanjioaca i razlike je 76. Odredi umanjenik i umanjilac ako se zna da je razlika za 6 veća od umanjioaca.
6. Zbir tri broja je 72. Odredi ih ako je svaki sledeći za jedan veći od prethodnog.
7. Zadata su tri broja. Odredi ih ako je svaki sledeći dva puta veći od prethodnog, a njihov zbir je 84.
8. Biciklista je prešao 37 *km*, što je za 5 *km* više od polovine puta. Koliko je dužina puta?
9. Pre 10 godina Nikola je imao trećinu sadašnjeg broja godina. Koliko godina ima sada?
10. Zbir dva broja je 29, a razlika 5. Odredi te brojeve.
11. Količnik dva broja je 5, a razlika 56. Odredi te brojeve.
12. U toku dana u jednoj prodavnici prodato je 63 *kg* banana. Pre podne je prodato dva puta više nego poslepodne. Koliko je kilograma banana prodato pre podne?
13. Zbir dva broja je 90, a razlika 36. Odredi te brojeve.
14. Tri druga sakupljaju klikere. Drugi ima 24 klikera više od prvog, a treći 16 manje od drugog. Koliko klikera ima više treći od prvog?
15. Koliko sličica ima Ana ako se zna: ako kupi još 4 sličice, imaće isto kao juče, a ko kupi još 28 sličica, imaće tri puta više nego što je juče imala. Koliko sličica Ana ima danas?
16. Brat i dve sestre imaju zajedno 24 godine. Koliko godina ima jedna sestra, a koliko druga ako brat ima 3 godine, a jedna sestra je starija od druge sestre isto toliko koliko je mlađa sestra starija od brata?
17. Kada je putnik prešao trećinu puta, ostalo mu je da pređe 35 *km* više nego što je prešao. Kolika je dužina celog puta i koliko još treba da pređe?
18. Kada je Jana pročitala 24 stranice jedne knjige, ostalo je još 16 stranica do polovine. Koliko stranica ima ta knjiga i koliko stranica još treba da pročita?
19. Otac i sin imaju zajedno 78 godina. Koliko godina ima otac, a koliko sin ako četvrtina očevih godina jednaka polovini sinovljevih godina?
20. Majka je tri puta starija od ćerke. Koliko godina ima majka, a koliko ćerka ako se zna da su pre pet godina imale zajedno 50 godina.

21. Tri dečaka imaju zajedno 240 dinara. Ako bi prvi dao drugom 9 dinara, a trećem 14 dinara, imali bi jedanke sume novca. Koliko je svaki od njih imao?
22. Domaćica je kupila 3 *kg* jabuka i 2 *kg* krušaka i platila 360 dinara. Po kojoj ceni su prodavane jabuke, a po kojoj kruške ako cena jabuka iznosi dve trećine cene krušaka?
23. Učenik je za jedan udžbenik i dve zbirke platio 1560 dinara. Koliko košta udžbenik, a koliko zbirka ako cena udžbenika iznosi tri petine cene zbirke?
24. Milan, Duan i Matija imaju 36 olovaka. Kada je Milan dao Duanu 6 olovaka, a Duan Matiji 4 olovke, tada je svaki od njih imao isti broj olovaka. Po koliko olovaka su imali na početku?
25. Zbir dva broja je 250. Ako prvi uvećamo tri puta, onda zbir ta dva broja iznosi 450. Odredi te brojeve.
26. Lubenica i po košta 270 dinara. Koliko košta pola lubenice?
27. Sveska i olovka koštaju 50 dinara. Koliko košta gumica ako sveska košta 30 dinara, a gumica je 8 dinara skuplja od olovke?
28. Zorica je potrošila četvrtinu svog novca, a zatim još 20 dinara, pa joj je ostala polovina cele sume. Koliko je novca imala Zorica?
29. Imamo 88 balona. Petina žutih jednaka je osmini plavih i devetini crvenih. Koliko ima plavih, žutih i crvenih balona?
30. Zbir trećine i četvrtine nekog broja je 210. Koji je to broj?
31. Milena i Jovana imaju zajedno 63 salvete. Trećina Mileninih jednaka je šestini Jovaninih. Koliko salveta ima Jovana, a koliko Milena?
32. Zoran i Goran imaju 35 golubova. Trećina Zoranovih jednaka je polovini Goranovih. Koliko ima Zoran, a koliko Goran?
33. Za knjigu je plaćeno 6 dinara i još polovina od vrednosti knjige. Koliko košta knjiga?
34. Dužina duži  $AB$  je 80 *cm*. Ta duž je podeljena trima tačkama na četiri duži. Rastojanje između sredina krajnjih duži je 66 *cm*. Koliko je rastojanje između sredina srednjih delova?
35. Milan je itao knjigu. Brat ga je pitao koliko jo ima da proita do kraja knjige. Milan mu je odgovorio Proitao sam trećinu knjige a ostalo mi je da proitam 20 stranica vie nego to sam proitao. Koliko stranica ima knjiga?
36. Milica, Jelena i Ivana imaju 12 lutki. Milica ima dva puta više lutaka nego Jelena i Ivana zajedno, a Ivana tri puta više nego Jelena. Koliko lutaka ima svaka od njih?
37. Otac je od sina stariji 28 godina. Zbir njihovih godina je 50. Koliko godina ima otac, a koliko sin?
38. Dečak je imao 370 dinara. Kada je kupio klikere za 40 dinara i olovku kojoj nije video cenu, ostalo mu je 210 dinara. Koliko je koštala olovka?
39. Za četiri olovke i 6 gumica plaćeno je 78 dinara. Olovka je dva dinara skuplja. Koliko košta olovka, a koliko gumica?
40. Šest svesaka i osam blokova plaćeno je 50 dinara. Koliko košta blok, a koliko sveska ako je sveska za dinar jeftinija?
41. Zbir dva broja je 550. Prvi je deset puta veći od drugog. Koji su to brojevi?
42. Trećak Joca kaže: Pre žest godina imao sam trećinu sadašnjeg broja godina. Koliko godina ima Joca?
43. Olovka, gumica i sveska koštaju 11 dinara. Olovka je za tri dinara skuplja od sveske, a za četiri dinara skuplja od gumice. Koliko koštaju sveska, olovka i gumica?
44. Zbir dva broja je 200. Ako prvi povećam 6 puta dobijemo zbir 600. Koji su to brojevi?
45. Baka i unuk imaju ukupno 65 godina. Unuk ima onoliko meseci koliko baka ima godina. Koliko godina ima unuk?
46. U jednoj školi ima ukupno 500 učenika i nastavnika. Desetina učenika jednaka je osmini učenica, a takođe i polovini nastavnika. Koliko ima učenika, učenica i nastavnika?

## 5 Aritmetičko-logički modeli: modeli jednačina i nejednačina

1. Kanap dužine 70 *cm* podeljen je na dva dela tako da je jedan deo 6 *cm* duži od drugog. Izračunaj dužinu svakog dela.
2. Prodavačica je spakovala voće u 6 jednakih kutija i preostalih 8 *kg* stavila u izlog. Po koliko kilograma je bilo u svakoj kutiji ako je ukupno bilo 80 *kg*?
3. Koliko je putnika bilo u autobusu ako je na svakoj od tri stanice izašlo po 14 putnika, a na krajnjoj stanici je izašlo 18 putnika?
4. Atletičar je posle određenog broja kilograma pravio pauzu. Posle treće pauze prešao je još 6 *km*, što ukupno iznosi 30 *km*. Posle koliko kilometara je atletičar pravio pauzu?
5. Zbir dva broja je 60. Jedan broj je pet puta veći od drugog. Izračunaj koliko iznosi svaki od njih.
6. Razlika dva broja je 640. Jedan je 5 puta manji od drugog. Koliko iznosi njihov zbir?
7. Koliko je sada sati ako je preostali deo dana petina onoga što je proteklo?
8. Koliko godina ima Petar ako je pre 6 godina imao trećinu sadašnjih godina?
9. Majka je tri puta starija od sina, a zajedno imaju 48 godina. Koliko godina ima majka, a koliko sin?
10. Otac i ćerka imaju zajedno 45 godina. Koliko je godina sada ocu ako je imao 25 godina kada mu se ćerka rodila?
11. Dva pešaka krenu istovremeno jedan drugome u susret iz dva mesta *A* i *B* udaljena 14 *km*. Jedan se kretao brzinom 3 *km* na sat, a drugi brzinom 4 *km* na sat. Posle koliko sati su se sreli?
12. Deda i unuk imaju zajedno 65 godina. Koliko godina ima deda, a koliko unuk, ako deda ima onoliko godina koliko unuk ima meseci?
13. Za dve žvake i tri čokolade plaćeno je 190 dinara, a za 3 žvake i 2 čokolade 160 dinara. Koliko košta jedna čokolada, a koliko žvaka?
14. Jednačina iz Moskovskog papirusa. Broj i njegova polovina daju 9. Nađi taj broj.
15. Milan je zamislio neki broj. Prvo ga je umanjio za 2, a potom dobijeni broj uvećao 4 puta. Zatim je tako dobijeni broj uvećao za 3 i rezultat umanjio 5 puta. Na kraju je dobio broj 7. Koji broj je Milan zamislio?

## 6 Geometrijski modeli: metoda pravougaonika

1. Ako stranice kvadrata povećamo za 2 *cm* dobićemo novi kvadrat čija je površina za 36 *cm*<sup>2</sup> veća od površine datog kvadrata. Izračunaj stranicu, obim i površinu datog kvadrata.
2. Ako jednu stranicu kvadrata povećamo za 5 *cm*, a druga ostane nepromenjena, dobićemo pravougaonik čija je površina za 15 *cm*<sup>2</sup> veća od površine kvadrata. Odredi obim tako dobijenog pravougaonika.
3. Ako se jedna stranica kvadrata poveća za 3 *cm*, a druga smanji za 2 *cm*, dobije se pravougaonik čija je površina veća od površine datog kvadrata. Odredi obim kvadrata i pravougaonika.
4. Stranice dva kvadrata razlikuju se za 4 *cm*, a površine za 64 *cm*<sup>2</sup>. Izračunaj obim manjeg kvadrata.
5. Stranice pravougaonika razlikuju se za 1 *cm*. Ako dužinu povećamo za 2 *cm*, površina će se povećati za 6 *cm*<sup>2</sup>. Izračunaj stranice zadatog pravougaonika.
6. Obim pravougaonika je 16 *cm*. Ako širinu povećamo za 2 *cm*, površina će se povećati za 10 *cm*<sup>2</sup>. Kolike su stranice takvog pravougaonika?
7. Ako se veći od dva činioća poveća za 5, proizvod se poveća za 20. Odredi činioće ako se oni razlikuju za 3.
8. Zbir dva činioća je 12. Ako se manji smanji za 2, proizvod će se smanjiti za 14. Odredi činioće tog proizvoda.
9. Ako se svaki od činilaca poveća za 2, proizvod se poveća za 42. Izračunaj činioće ako se oni razlikuju za 5.
10. Ako jedan činilac povećamo za 3, a drugi za 1, proizvod se poveća za 17. Odredi činioće ako je jedan veći od drugog za 2.
11. Obim pravougaonika je 22 *cm*. Ako dužu stranicu produžimo za 3 *cm*, a kraću skratimo za 1 *cm*, površina se poveća za 2 *cm*<sup>2</sup>. Izračunaj površinu zadatog pravougaonika.
12. Ako se dužina pravougaonika smanji za 3 *cm*, a širina poveća za 2 *cm*, dobije se kvadrat jednake površine datom pravougaoniku. Za koliko se razlikuju njihovi obimi?

## 7 Metoda prebrojavanja

1. Koliko je potrebno cifara da se napišu: jedocifreni prirodni brojevi; dvocifreni brojevi; brojevi prve stotine?
2. Koliko puta se upotrebi cifra 7 da bi se napisali svi dvocifreni brojevi?
3. Da li se svaka cifra pojavi isti broj puta pri pisanju svih dvocifrenih brojeva?
4. Koliko se cifara upotrebi da bi se napisali svi dvocifreni brojevi manji od 69?
5. Koliko je cifara upotrebljeno pri numerisanju knjige koja ima 76 strana?
6. U jednoj ulici je 100 kuća. Na svakoj kući postavljena je table sa kućnim brojem. Koliko je cifara upotrebljeno za numerisanje?
7. Knjiga ima 785 stranica. Koliko je cifara upotrebljeno za njenu numeraciju?
8. Date su cifre 1, 2, 3, 4. Koliko se trocifrenih brojeva može napisati pomoću datih cifara, ako se cifre ponavljaju, i koliko ako se cifre ne mogu ponavljati?
9. Koliko se četvorocifrenih, a koliko petocifrenih brojeva može napisati pomoću cifara 0, 3, 6?
10. Koliko četvorocifrenih brojeva počinje cifrom 9?
11. Koliko trocifrenih brojeva se završava cifrom 4?
12. Koliko se trocifrenih brojeva može napisati pomoću neparnih cifara?
13. Od Sombora do Vrbasa vode tri puta, a od Vrbasa do Novog Sada dva puta. Na koliko načina se može putovati od Sombora do Novog Sada?
14. Na koliko načina 4 dečaka mogu sedeti na 4 stolice u svečanoj sali?
15. Na koliko načina se 4 lusteri mogu postaviti u 4 sobe?

## 8 Metoda inverzije

1. Zamislio sam jedan broj, dodao mu trideset i dobio broj sto. Koji broj sam zamislio?
2. Pojeo sam polovinu čokolade i ostalo mi je još 4 štangle. Koliko štanli ima cela čokolada?
3. Uzeo sam jednu četvrtinu bombona i ostalo ih je šest. Koliko bombona je bilo pre uzimanja?
4. Ivan pita učitelja, koliko njihova škola ima đaka? Ušitelj odgovara: "Kada bi ih bilo pet puta više nego što što ih zapravo ima i još 100, bilo bi ih 5000." Koliko Ivanova škola ima đaka?
5. Kosta je zamislio jedan broj, pomnožio ga sa 8, zatim od dobijenog rezultata oduzeo 12, zatim novi rezultat podelio sa 11, dodao tome 35 i dobio 39. Koji broj je Kosta zamislio?
6. Vozeći se liftom u jednoj višespratnici, Ivan se nađe na njenoj polovini. Zatim se liftom popne za 5 spratova više, pa se spusti 7 spratova niže, pa se opet popne 8 spratova više i na kraju se spusti za 16 spratova i izađe iz zgrade. Koliko spratova je imala ta višespratnica?
7. Jedna žena je donela korpu bresaka na pijacu. Prvom kupcu je prodala polovinu bresaka i još jednu breskvu, drugom polovinu ostatka i još dve breskve, a trećem polovinu ostatka i još dve breskve. Tada je prodala sve breskve. Koliko je bresaka imala na početku prodaje?
8. Janko, Ranko i Marko imaju zajedno 63 sličice. Kada je Janko dao Ranku 8 sličica, a Ranko Marku 6 sličica, svaki od njih je imao isti broj sličica. Koliko je sličica imao svaki od njih na početku?
9. Dule, Sale i Rale imaju, svaki, po izvestan broj žetona. Dule daje ostaloj dvojici onoliko žetona, koliko svaki od njih dvojice već ima. Zatim Sale daje od svojih žetona ostaloj dvojici onoliko, koliko svaki on njih dvojice već ima. Kada Rale da od svojih žetona ostaloj dvojici onoliko, koliko svaki od njih dvojice već ima, svakom ostane 24 žetona. Koliko žetona je svaki od njih imao na početku igre?
10. Ana je prvog dana pročitala  $\frac{1}{4}$  knjige, drugi dan pročitala  $\frac{1}{3}$  preostalog dela knjige, treći dan je pročitala  $\frac{1}{2}$  preostalog dela knjige i ostalo joj je da pročita do kraja još 70 strana. Koliko je knjiga imala strana?
11. U tri bureta nalaze se izvesne količine soka. Ako iz prvog bureta prelijemo jednu polovinu u drugo bure, zatim iz drugog bureta prelijemo jednu trećinu soka u treće bure i zatim, iz trećeg bureta prelijemo jednu četvrtinu soka u prvo bure, tada ćemo u svakom buretu imati po 24 litra soka. Koliko je bilo soka u buradima pre preliivanja?

## 9 Matematički modeli kombinatorike: permutacije, varijacije, kombinacije

1. Na koliko načina Maja može da dođe od kuće do fakulteta, ako mora da svrati u pekaru, i ako od njene kuće do pekare vode 4 puta, a od mesta pekare do fakulteta vodi 5 različitih puteva?
2. Dragana ima 3 haljine, 4 suknje i 5 košulja. Na koliko različitih načina Dragana može da se obuče za svoj prvi radni dan (sve suknje i košulje se međusobno slažu)?
3. Sara putuje iz Novog Sada u Budimpeštu. Postoji mogućnost da ide auto-putem preko Subotice ili magistralnim putevima preko Sombora. Od Novog Sada do Sombora može stići na četiri različita načina, a od Sombora do Budimpešte na dva različita načina. Na koliko različitih načina Sara može da stigne na svoje odredište?
4. Napisati sve permutacije nad skupom:
  - a.  $A_1 = \{1\}$ .
  - b.  $A_2 = \{1, 2\}$ .
  - c.  $A_3 = \{1, 2, 3\}$ .
  - d.  $A_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ .Koliko ima permutacija nad datim skupovima?
5. Koliko ima permutacija nad skupom od pet elemenata? Koliko nad skupom od 6, 7 ili 10 elemenata?
6. Koliko ima permutacija od slova reči *PETAR*? Koliko od tih permutacija počinje slovom *P*, a završava se slovom *R*? Nabrojte sve takve permutacije.
7. Na koliko načina tri prijatelja, Alen, Vlada i Goran mogu da sednu jedan do drugoga na klupu?
  - a. Ako se Alenu, Goranu i Vladi pridruži Nemanja, na koliko različitih načina mogu sedeti na klupu?
  - b. A na koliko načina mogu sedeti ako im se pridruži Bjanka?
8. Na koliko načina se mogu izabrati četiri osobe, na četiri različite funkcije od devet kandidata?
9. Koliko ima trocifrenih brojeva sastavljenih od cifara iz skupa  $S = \{1, 2, 3\}$ ? Koliko je takvih brojeva sastavljeno od sve tri različite cifre?
10. Gost u hotelu za doručak može birati kafu, čaj ili mleko. Koliko ima načina za izbor, ako ostaje u hotelu sedam dana?
11. Koliko različitih izbora postoji da se iz kompleta koji sadrži 32 karte izabere 5 karata:
  - a. sa vraćanjem, ako je redosled bitan;
  - b. bez vraćanja, ako je redosled bitan.
12. Filip, Nikola i Marko skaču sa visoke skakaonice u bazen.
  - a. Koji su sve mogući redosledi drugara da skoče?
  - b. Koji su mogući redosledi ako Marko hoće da skače posle Nikole?
  - c. Koji su mogući redosledi ako Filip neće da skoči prvi?
13. Dat je skup  $A = \{a, b, c, d, e\}$ .
  - a. Koliko ima reči dužine 2 sastavljenih od slova iz skupa  $A$ ?
  - b. Koliko ima reči dužine 3 sastavljenih od reči slova iz skupa  $B = A \setminus \{e\}$ ?
  - c. Koliko ima reči dužine 4 sastavljenih od slova iz skupa  $C = \{a, b\}$ ?
  - d. Koliko ima reči dužine 3 sastavljenih od različitih slova iz skupa  $A$ ?
  - e. Kakav bi bio odgovor pod d. da u skupu  $A$  ima 6, 7, 10 ili 30 različitih slova?
14. Koliko ima reči dužine 5 od dva slova? A reči dužine 10?
15. Dat je skup  $S = \{2, 4, 5, 8\}$ . Napisati i prebrojati sve varijacije klase 2 od elemenata skupa  $S$ ?
  - i) bez ponavljanja,
  - ii) sa ponavljanjem.
16. Ukoliko učenici sutra imaju četiri časa: srpski, fizičko, muzičko i likovno, na koliko različitih načina se može napraviti raspored časova, tako da muzičko bude poslednji čas?
17. U rasporedu časova za sredu treba da se nađu po jedan čas iz srpskog jezika (S) i matematike (M) i po dva časa prirode i društva (P) i fizičkog vaspitanja (F). Na koliko načina se može napraviti raspored za sredu?

18. Mia ima 10 različitih knjiga iz matematike, 5 različitih knjiga iz fizike i 4 različite knjige iz hemije.
- Na koliko načina može poređati knjige na policu?
  - Na koliko načina Mia može poređati knjige na policu tako da knjige iz iste oblasti stoje jedna do druge?
19. Date su cifre 4, 6, 8. Napisati sve kombinacije sa ponavljanjem:
- druge klase,
  - treće klase.
20. U jednoj kutiji se nalazi šest loptica označenih sa 1, 2, ..., 6. Na koliko načina možemo izabrati pet loptica? Napisati sve moguće kombinacije.
21. Koliko ima kombinacija u igri loto (od 39 brojeva se izvlači 7 brojeva)?
22. U odeljenju ima 12 dečaka i 15 devojčica.
- Na koliko načina se mogu izabrati 4 učenika da predstavljaju razred na školskom kvizu?
  - Na koliko načina je to moguće učiniti ako se traži da 2 učenika budu dečaci, a 2 devojčice?

## 10 Modelovanje na kvadratnoj mreži

1. Popuni prazna polja kvadrata sa tri dvojke i tri jedinice tako da zbrovi u svim pravcima budu jednaki.

|   |   |   |
|---|---|---|
| 3 |   |   |
|   |   | 3 |
|   | 3 |   |

2. Upiši brojeve u slobodna polja kvadrata tako da zbrovi horizontalno, vertikalno i dijagonalno budu 15.

|   |   |   |
|---|---|---|
|   |   |   |
| 7 | 5 |   |
|   |   | 4 |

3. Odredi prvo karakterističan zbir, a onda dopuni magični kvadrat.

|   |   |   |
|---|---|---|
| 7 |   |   |
|   | 8 |   |
|   | 4 | 9 |

|   |   |   |
|---|---|---|
|   |   |   |
| 4 | 6 | 8 |
|   |   | 7 |

|   |   |    |
|---|---|----|
|   |   | 6  |
|   | 7 |    |
| 8 |   | 10 |

4. Sastavi magični kvadrat od prvih devet prirodnih brojeva. Prvo izračunaj karakterističan zbir.
5. Sastavi magični kvadrat čiji su elementi brojevi: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 i 12.
6. Sastavi magični kvadrat čiji su elementi brojevi: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 i 11.
7. Mogu li se brojevi 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0 i 1 rasporediti u polja kvadrata pa da kvadrat bude magičan?

|  |  |  |
|--|--|--|
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

8. Rasporedi u slobodne kvadrate brojeve 2, 4, 6, 8, 12, 14, 16 i 18 tako da zbir u svakom pravcu iznosi 30.

|  |    |  |
|--|----|--|
|  |    |  |
|  | 10 |  |
|  |    |  |

9. U prazna polja upiši brojeve koji nedostaju iz niza od 1 do 16 tako da karakterističan zbir bude 34.

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 14 |    |    | 12 |
|    | 4  |    |    |
| 8  |    | 11 |    |
|    | 10 | 5  |    |

|   |    |    |    |
|---|----|----|----|
|   | 3  |    | 13 |
| 5 |    | 11 |    |
| 9 |    |    | 12 |
|   | 15 | 14 |    |

|   |    |   |    |
|---|----|---|----|
|   | 12 |   |    |
|   | 8  | 5 |    |
| 7 |    | 2 |    |
| 4 |    |   | 11 |



## 11 Problemi merenja, prelivanja, prenošenja i prevoženja

1. Sandra je kupila 11 *kg* luka. Za mešanu salatu koju priprema za zimu, prema receptu, potrebno je 2 *kg* i 500 *g* luka. Da bi izmerila tu količinu na raspolaganju joj je vaga sa dva tase, dva tega po 100 *g* i jedan teg od 50 *g*. Objasni kako će Sandra u tri koraka izmeriti 2 *kg* i 500 *g* luka.
2. Pomoću sudova od 3 *l* i 5 *l* odmeri:
  - a) 1 *l* tečnosti;
  - b) 4 *l* tečnosti.
3. Pomoću kanti od 4 *l* i 9 *l* odmeri tačno 7 *l* vode sa što manje presipanja i prosipanja vode.
4. U balonu je 20 *l* vode. Da li možeš pomoću balona od 7 *l* i 3 *l* da izmeriš 5 *l*, pri čemu je dozvoljeno prosipanje?
5. U jednom sudu je 12 *l* vode. Možeš li bez prosipanja odmeriti 11 *l* ako imaš na raspolaganju prazne balone od 3 *l* i 5 *l*?
6. U jednoj korpi je 20 jabuka, a u drugoj 16. Koliko jabuka treba premestiti iz jedne u drugu korpu da bi u obe bio isti broj jabuka?
7. Jovan ima isti broj klikera u oba džepa. Ako iz jednog premesti u drugi 3 klikera, koliko je sada više klikera u drugom džepu nego u prvom?
8. Na svakoj od dve police nalazi se isti broj knjiga. Koliko je knjiga premešteno sa jedne police na drugu ako je na prvoj polici 8 knjiga više nego na drugoj?
9. U kutiji se nalaze 3 crvene i 3 bele kuglice. Bez gledanja izvlačimo jednu po jednu kuglicu. Koliko najmanje kuglica moramo izvući da bi tri bile iste boje?
10. Biciklista ide iz mesta *A* u mesto *B* i prelazi 38 *km* svakog časa. Ako su ova dva mesta udaljenja 120 *km*, odredi koliko je biciklista udaljen od:
  - a) mesta *A*;
  - b) mesta *B* polse 3 *h* vožnje?
11. Voz iz Beograda ka Nišu se kreće brzinom od 80 *km/h*, a iz Niša ka Beogradu voz ide brzinom od 70 *km/h*. Koliko će vozovi biti udaljeni jedan od drugog jedan sat pre susreta?
12. Pas je ugledao zeca na rastojanju od 60 metara i pojurio za njim. Za koliko će pas stići zeca ako on prelazi 5 metara u sekundi, a zec 3 metra u sekundi?
13. Puž treba da se popne na brdo visoko 1248 *m*. Ako se danju penje 4 *m*, a noću skliže 2 *m*, koliko dana mu treba da se popne na vrh brda?
14. Iz Kragujevca i Beograda kreću jedan drugom u susret motociklista i automobilista. Motociklista ide brzinom od 40 *km* na čas, a automobilista 60 *km*. Ako je rastojanje Beograd-Kragujevac 120 *km*, ko je u trenutku njihovih susreta bio bliži Beogradu?
15. Vuk ugleda lisicu 21 *m* ispred sebe. Da li je može stići sa 50 skokova, ako je dužina njegovog skoka 75 *cm*, a ljinog 45 *cm*?

## 12 Metoda tablica

Koristi metodu tablica u sledećim zadacima:

1. Na Tamarinom rođendanu je bilo 5 dečaka i 4 devojčce. Svi dečaci su plesali po jedan ples sa svakom devojčicom. Izračunaj ukupan broj plesova.
2. Goran, Siniša i Mateja stanuju u istoj zgradi. Njihova prezimena su Petković, Jovović i Simić. Kako se preziva svaki od dečaka ako je poznato da Siniša nije Simić, da se Goran ne preziva Jovović, a da Mateja nije ni Petković ni Jovović.
3. Maja, Dragana i Željka su uključene u različite sportske i likovne aktivnosti. Maja igra košarku i ne voli slikanje. Željka ne voli ni vayanje ni crtanje, a ona koja se bavi vayanjem ne voli rukomet, nego odbojku. Koji sport, a koju likovnu aktivnos pohađa svaka od njih?
4. Na kraju prethodne školske godine Nina, Ana, Vanda i Cica su pitale profesoricu koje su im zaključene ocene iz engleskog jezika. Dobile su sledeći odgovor: "Dve od vas imaju iste ocene, a ostale različite. Nijedna nema ocenu nedovoljan i dobar. Vanda nema ocenu vrlo dobar, Nina dovoljan i odličan, a Cica i Vanda su bolje od Ane." Koju ocenu ima svaka od njih?

## 13 Geometrijski modeli: metoda grafova i fokusnog dijagrama

Koristi metodu grafova:

1. Učenici završnih razreda osnovne škole su, na proslavi mature, formirali parove devojčica i dečaka koji su u svečanoj koloni išli do gradskog trga, a potom i do hotela. Mirela, Brankica, Tijana, Bojan, Tomo i Miroslav su bili raspoređeni u prva tri para. Ko je s kim bio u paru ako je poznato da je Bojan bio ispred Mirele i da parove ne čine učenici sa istim početnim slovom imena?
2. Peđa i Miki su se igrali pogađanja zamišljenog broja. Peđa kaže: "Moj zamišljeni broj je prvo umanjen 4 puta, potom je dobijenom količniku dopisana jedna nula i sve to povećano za devet desetica, a potom udvostručeno. Na kraju, kada su odbačene poslednje dve cifre koje su bile nule, ostao je broj 5. Koji broj je zamislio Peđa?"
3. Na času fizičkog vaspitanja učenici jedog odeljenja su podeljeni u 5 grupa koje predstavljaju ekipe za basket. Grupe igraju svaka sa svakom. Koliko će utakmica ukupno biti?

Koristi metodu fokusnog dijagrama:

1. Koliko ima dvocifrenih brojeva kod kojih je cifra desetica deljiva sa tri, a cifra jedinica paran broj manji od 6?
2. Miljana se spremala za rođendansku zabavu. Pripremila je 3 suknje, 5 bluza, cipele i sandale. Na koliko različitih načina Miljana može kombinovati navedene odevne predmete i obuću? Koristiti metodu fokusnog dijagrama.
3. Koliko se dvocifrenih brojeva može napisati ciframa iz skupa  $\mathbb{N}_0$ ?
4. Marijanini roditelji u voćnjaku uzgajaju tri sorte breskve, četiri sorte kajsije i pet sorti jabuke. Njena mama pravi mešane sokove od sve tri vrste voća. Koliko različitih vrsta sokova može napraviti?

Koristi metodu blok dijagrama:

1. Sastavi algoritam u vidu blok dijagrama za izračunavanje zapremine kvadra čije su dimenzije: dužina  $a$ , širina  $b$ , visina  $c$  ( $a, b, c \in \mathbb{N}$ ).
2. Sastavi algoritam za izračunavanje površine kocke stranice  $a$  ( $a \in \mathbb{N}$ ).