Педагошки факултет у Сомбору

Катедра за математику и методику наставе математике

ЛОГИЧКЕ ОСНОВЕ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ

Методика наставе математике 1

Математичко мишљење

- Развој **математичког мишљења**-

важан циљ почетног учења и наставе математике

- *Засновано на логичким основама:*

- логичке операције

(конјукција ,,и",

дисјункција ,,или",

негација ,,не",

импликација ,,ако...онда",

еквиваленција ,,ако и само ако")

- мисаони поступци (операције)

- закони закључивања

Мисаоне операције

- *Мисаони поступци којима се изграђује математички појам и успостављају везе између појмова*

- Ефикасно математичко образовање→познавање суштине мисаоних поступака
- **Развијање** мисаоних поступака -<u>важан задатак почетне наставе математике</u>
- Мисаоне операције у почетној настави математике:

1. анализа и синтеза

2. апстракција и генерализација

3. конкретизација и специјализација

4. упоређивање или компарација

5. идентификација и диференцијација

**** Инверзност и ревезибилност мишљења (дијалектички однос)***

АНАЛИЗА И СИНТЕЗА

- Прва мисаона степеница у решавању задатака и формирању математичких појмова
- АНАЛИЗА – мисаоно рашчлањавање целине на њене саставне делове
- СИНТЕЗА – мисаоно обједињавање релевантних одредаба у целину
- Важна улога код решавања проблема

ПРИМЕРИ:

- Анализа-

- посматрањем моделa геометријских тела, анализирамо саставне делове тела;
- број 42 (4 д + 2ј)

- Синтеза-

срeђујемо елементе у једну целину

нпр. $236 = 2\cdot 100 + 3\cdot 10 + 6\cdot 1$

$\underline{+\ 421 = 4\cdot 100 + 2\cdot 10 + 1\cdot 1}$

$6\cdot 100 + 5\cdot 10 + 7\cdot 1 = 657$

АПСТРАКЦИЈА И ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈА

- АПСТРАКЦИЈА – мисаоно издвајање битних карактеристика, својстава, веза, конкретних појава и истовремено одбацивање небитних мање значајних својстава (физичких)

**Пример: Формирање појма кружнице*

а) посматрамо-Сунце, Месец, грамофонска плоча, рингла на шпорету, CD

б) занемарујемо физичка својства-топлота, светлост, боја, естетски изглед

-задржавамо границу која је округла

Пример: **Формирање појма броја 3**

А) Посматрамо различите скупове са 3 елемента – три дрвета, три аутомобила, три оловке, итд.

Б) апстракцијом занемарујемо све осим њихове бројности

именујемо количину-бројност (три/3)

- ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈА (УОПШТАВАЊЕ) – када су апстакцијом одвојене битне карактеристике (посматрањем објекта) онда се генерализацијом повезују у једну целину и та целина представља критеријум проширивања на све елементе са тим својствима.

**Пример:* Израчунавање непознатог сабирка

$x+5=7$; $x+8=12$

$X+a=b$

$X=b-a$

<u>КОНКРЕТИЗАЦИЈА И СПЕЦИЈАЛИЗАЦИЈА</u>

- КОНКРЕТИЗАЦИЈА- ради лакшег усвајања Идентификује се пример са својствима неког општег појма - апстрактно-општа својства употпуњују преко конкретно-појединачног.

Пример 1: <u>Појам геометријских тела</u>

преко конкретних модела, <u>квадра, коцке, купе</u>, итд.

Пример 2: *<u>Појам разломка</u>*

дељењем конкретне целине на делове (круг, дуж, правоугаоник, ...)

- СПЕЦИЈАЛИЗАЦИЈА – преношење својстава која важе за неки шири скуп на неки његов прави подскуп.
- Пример 1: Троугао $\alpha + \beta + \gamma = 180$

1. Једнакокраки троуглови $2\alpha + \beta = 180$

   специјализација

2. Примена на конкретан троугао са задатим елементима, нпр. $\beta = 45$

   конкретизација

<u>Пример 2</u>

- Својство за било који правоугаоник примењено на квадрату- специјализација
- <u>Посматрањем</u> специјалног правоугаоника са једнаким страницама
- Ако посматрамо квадрат чија је страница дужине 5 cm - конкретизација

УПОРЕЂИВАЊЕ ИЛИ КОМПАРАЦИЈА
лежи у основи свих других мисаоних операција

- Откривање сличности и разлике између посматраних појава
- \- упоређују се само појмови који имају везу једни са другима, нпр. квадрат и правоугаоник, а НЕ троугао и новчану ј-цу
- Примери:

1. Решавање низа задатака типа 3+1=4, 1+3=4; 2+3=5, 3+2=5,...

- Упоређивањем закључујемо да збир не зависи од замене места сабирака

- Навести ученике на активну употребу мисаоне операције упоређивања
- Како?

- није довољно да реше изразе 3+1 и 3+2 и упореде их 4<5

- Тражити да уоче сличности и разлике

Сличност :

- знак + и први сабирци исти

Разлика :

- други сабирак, збир.

Ради развијања способности упоређивања и самосталности , задатке треба усложњавати:

- Примери

1. Уочи разлику и сличност:

   5+3, 4+3, 8-3, 7-3, 6+3, 9-3

Сличност: исте операције, други сабирак и умањилац

Разлика: вредност израза у 1. групи за три већа од првог сабирка, у 2. за три мања

Даље усложњавање

- Упореди одговарајуће парове:

  а) 5+3   б) 4+3   в) 6+3

  8-3   7-3   9-3

- У 1. изразу додаје се 3 а у 2. одузима 3, у сваком пару одузимање се врши од вредности првог израза
- Шта уочаваш у следећем низу израза:

1+1, 2+1, 3+1, 4+1, 6+1, 7+1,..

Свуда је сабирање, други сабирак 1,

прави квалитет- <u>низ 1. сабирка нарушен</u>

ИДЕНТИФИКАЦИЈА И ДИФЕРЕНЦИЈАЦИЈА

(КОД МАТЕМАТИЧКИХ ТВРЂЕЊА, условљене анализом и упоређ.)

- Идентификација- утврђивање <u>једнаких</u> одредби објеката
- Диференцијација- утврђивање <u>различитих</u> одредби објеката
- Пример 1: <u>Формирање појма броја</u>

а) Посматрање скупова, расчлањивање према својствима (анализа)

б) увиђање истих и различитих својстава (упоређивање)

- в) идентификација - ,,једнакобројни су”
- г) диференцијација- издвајање различитих својстава: боја, облик, величина,...
- Пример 2: Појмови ,,за толико више” и ,,толико пута више”
- Два задатка:
- У једној кутији се налази 9 бомбона а у другој за 4 више (4 пута више) него у првој. Колико бомбона има у другој кутији?

- Анализа: дате величине –

а) - у првој кутији 9 бомбона

-у другој за 4 више (4 пута више)

Питање: Колико бомбона има у другој кутији?

б) Идентификација једнаких података у оба задатка- у првој кутији 9 бомбона

в) Диференцијација различитих података:

- за 4 више - сабирање
- 4 пута више - множење

Закључак: „за толико више” +

„толико пута више” .

Закони закључивања

- Важан задатак почетне наставе математике- *одређивање међусобних односа математичких објеката и истицање њихових карактеристика*
- ИСКАЗИ (реченице) – тачни/нетачни, символи

  Нпр. *Број 5 је мањи од броја 6.*

- ЦИЉ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ:

✓ **Оспособити ученике за самостално испитивање односа међу објектима**

ТВРЂЕЊЕ→исправно закључивање

- Математичко закључивање: мисаона операција којом се изједног/више датих исказа формира нови-ЗАКЉУЧАК (логички, образложен)

- Полазни искази- *претпоставке, премисе*
- Нови исказ- *закључак, последица*
- <u>Веза између више премиса</u>

Закључивање: *непосредно* и *посредно*

- <u>Оспособити ученике да сами одређују тачност добијеног закључка- **тачан/нетачан**</u>
- ***Непосредно закључивање:***
- Једна премиса,
- Сви појмови из премисе и у закључку,
- Другачији распоред, квалитет и обим.

<u>Врсте:</u>

- **непосредно дедуктивно закључивање** и
- **закључивање по аналогији (**сличности**)**

Непосредно дедуктивно закључивање

- Из једне тачне премисе о математичком појму, изводи се закључак о другом појму мање општости (од општег ка посебном)
- Пример:

Сваки квадрат је правоугаоник.

Два тачна закључка:

1. Неки квадрат је правоугаоник.

2. Неки правоугаоник је квадрат.

Посредно закључивање

- Закључивање из више претпоставки:

  индуктивно и дедуктивно

- Индукција (навођење): облик закључивања којим се из више појединачних тврђења изводи тврђење у општем случају,

  ,,од појединачног ка општем"

- Непотпуна и потпуна

Непотпуна индукција:

- Општи закључак изводи се из више појединачних тачних тврђења, не свих.
- Најчешћи облик закључивања
- Примери:
- $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2,\ 7 \cdot 5 = 5 \cdot 7,\ 107 \cdot 309 = 309 \cdot 107, \dots.$

$$\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$$

- Закључак из непотпуне индукције може бити непоуздан.
- Примери:
- 1. $5 \cdot 2 = 10$, $5 \cdot 4 = 20$, $5 \cdot 6 = 30$ **следи <u>нетачан</u> <u>закључак:</u>**

Производ два броја од којих је један чинилац 5, завршава се нулом.

2. $(2+4):2=3$, $(4+4):2=4$,........, **следи <u>нетачан</u> <u>закључак:</u>**

Ако је збир дељив са 2, тада је и сваки сабирак дељив са 2.

Потпуна индукција

- Добијају се потпуно тачни закључци, мало се примењује- потребно да се исцрпе сви појединачни случајеви, којих често има много.
- Примери:
- Колико парних бројева има у првој десетици? Пребројавањем 2,4,6,8,10 *Закључак*: Има их пет.

- Тачни појединачни искази:

- *Дијагонале квадрата се полове,*
- *Дијагонале правоугаоника се полове,*
- *Дијагонале ромба се полове,*
- *Дијагонале ромбоида се полове,*

<u>Следи тачан закључак:</u>

Дијагонале свих паралелограма се полове.

Дедукција

- Закључивање <u>од општег ка појединачном</u>.
- Оно што важи у општем случају важи за посебно и појединачно.
- Најчешћи облик дедуктивног закључивања,

СИЛОГИЗМИ

Из две премисе, опште и појединачне изводи се закључак мање општости.

- Примери:

1. Сви *парни* бројеви су дељиви са 2.

   Број 12 је *паран* број.

- Изводи се закључак:

Број 12 је дељив са 2

2. Сваки *правоугаоник* је четвороугао.

   Квадрат је *правоугаоник.*

- Изводи се закључак:

Квадрат је четвороугао.

➢ За исправан закључак, *постојање заједничког термина у обе премисе*.

- *Строги математички докази захтевају **дедуктивни** облик закључивања* (аксиоме, теореме, дефиниције,..)

- Са доказивањем <u>почети од 1. разреда</u>:

\- Докази одударају, имају *приземан* смисао, примерен узрасту ученика.

\- Развијање потреба код деце да изнета тврђења аргументују – докажу.

- Питања: Због чега? Објасни?...

➢ <u>Научити ученике да расуђују</u>

АНАЛОГИЈА И ИНТУИЦИЈА (КОД ЗАКЉУЧИВАЊА)

- АНАЛОГИЈА – заснива се на компарацији утврђивање сличности садржаја и метода које омогућују трансфер сазнања (позитивна и негативна)

Пример 1:Биквадратне једначине $ax^4 + bx^2 + c = 0$

- Компарација са познатим облицима једначина – квадратна јед. $ax^2 + bx + c = 0$
- Увођење смене:

$$y = x^2$$

- Примери:
  - 1. разред – бројање у другој, трећој,..десетици ***аналогно бројању једноцифрених бројева***

- **Својство асоцијативности/комутативности код множења -** аналогно својствима код сабирања

- Решавање неједначина ***аналогно*** решавању једначина

- Негативна аналогија: *Дистрибутивност*

множење збира и разлике $\neq$ дељење збира и разлике

у скупу *N*

- Квадрат и ромб имају једнаке странице:

- *Око квадрата можемо описати кружницу*

НЕГАТИВНА АНАЛОГИЈА:

Око ромба можемо описати кружницу

- Правоугаоник и квадрат имају праве углове:

- *Дијагонале квадрата секу се под правим углом*

НЕГАТИВНА АНАЛОГИЈА:

Дијагонале правоугаоника су узајамно нормалне

- Закључивање по аналогији није увек поуздано- мора да се провери

- ИНТУИЦИЈА- субјективан потенцијал за извођење закључка, наслућивање решења (исхода)-
- Ослања се на <u>чула и искуство</u>
- ,,Аха” ефекат (сине нам идеја за решење)
- Разликује нас од машина
- <u>Резултат</u> мора бити <u>подвргнут провери</u>
- *Нема решења без дуготрајног мисаоног истраживања проблема*.
- Логички/проблемски задаци

- Скраћени вид закључивања
- Без извођења посебних закључака интуитивно:

- *Дуж је најкраће растојање између две тачке,*
- *Сви полупречници једне кружнице су међу собом једнаки*

- Како долази до изражаја у задацима?

- A=1+3+5+......+97+99,
- B=2+4+6+.......98+100.

- Не сабирањем, тражити лакши начин решења. Како?
- Упоређивање и уочавање да је сваки сабирак из збира B за један већи од одговарајућег сабирка из збира A!

- Како збир парних/непарних бројева у првој стотини чини 50 сабирака, следи да је збир парних бројева за 50 већи од збира непарних бројева.

- У почетној настави математике проистиче из природе мишљења, ученици не поседују велики обим математичких знања
- Идеје најчешће засноване на наслућивању, а не на строго логичкој процедури мишљења

Литература:
Дејић, М., Егерић, М. (2010): *Методика наставе математике*. Београд: Учитељски факултет.

- *Мисаоне операције*, стр.42-45.
- *Математичко закључивање и доказивање*, стр. 52-64.

Срдачан поздрав и добро здравље

доц. др Бојан лазић