

OCENA PARAMETARA MODELA

Ocena parametara modela je postupak eksperimentalnog određivanja vrednosti parametara koji se pojavljuju u matematičkom opisu modela. Polazi se od pretpostavke da je struktura modela, odnosno veza između promenljivih modela i parametara, eksplicitno data. Uglavnom se polazi od pretpostavke da svi parametri imaju ne vrednosti različite od nule.

Posmatrajmo sistem definisan matematičkim modelom u prostoru stanja:

$$s' = f(s, u, p, t), \quad y = g(s, u, p, t), \quad s(t_0) = s_0$$

OCENA PARAMETARA MODELA

Gde su:

s - vektor stanja dimenzije n ,

u - vektor ulaza dimenzije m ,

y - vektor izlaza dimenzije k ,

p - vektor sastavljen od n_p nepoznatih parametara,

f i g su odgovarajuće vektorske funkcije,

s_0 - početni uslovi.

OCENA PARAMETARA MODELA

Potrebno je za dati model i skup ulaznih i izlaznih podataka, odrediti vektor nepoznatih parametara p , pri čemu moraju biti poznati početni uslovi. Pitanje je da li se parametri mogu identifikovati, tj. da li ih je moguće matematički odrediti?

Postoji više različitih pristupa problemu ocene parametara. Klasičan pristup je čisto statistički i njegova primena zahteva ispunjenje odgovarajućih uslova. Moguće je problem određivanja parametara posmatrati i kao optimizaciju pogodno definisane funkcije cilja, što zahteva manje početnih pretpostavki.

OCENA PARAMETARA MODELA

Jedinstveni pristup oceni parametara modela nije moguće realizovati. Stoga se za ocenu parametara za pojedine klase modela koriste algoritmi čija struktura zavisi od:

1. formalizma modela:

- a)** kontinualno – vremenski;
- b)** diskretno – vremenski;
- c)** linearni ili nelinearni;
- d)** deterministički, stohastički.

OCENA PARAMETARA MODELA

2. konteksta modelovanja:

- a)** tip promenljivih stanja;
- b)** apriorno znanje;
- c)** svrha modela.

3. filozofija procene:

- a)** kriterijumi;
- b)** numerička procedura;
- c)** prilaz izračunavanju.

OCENE PARAMETARA DETERMINISTIČKOG MODELA

Za model sa poznatom strukturom mogu se uvesti sledeće definicije:

1. Za skalarni parametar p_j kaže se da je identifikabilan na intervalu $[t_0, T]$, ako postoji konačan broj rešenja za p_j koja proizilaze iz relacije datog modela.

Skalarni parametar je neidentifikabilan ako postoji beskonačan broj rešenja za p_j , koja proizilaze iz relacija modela.

OCENE PARAMETARA DETERMINISTIČKOG MODELA

2. Opis modela je sistemski identifikabilan, ako su svi parametri identifikabilni. U suprotnom, ako je barem jedan parametar neidentifikabilan, opis modela je sistemski neidentifikabilan.

3. Skalarni parametar p_j je jedinstveno identifikabilan na intervalu $[t_0, T]$, ako postoji jedinstveno rešenje za p_j koje proizilazi iz relacija modela sa datim ulazom.

4. Specifikacija modela je parametarski identifikabilna na intervalu $[t_0, T]$ ako su svi parametri jedinstveno identifikabilni.

OCENE PARAMETARA DETERMINISTIČKOG MODELA

Ove definicije su primenljive i na diskretne vremenske modele i dovoljne su da opišu sve uslove identifikabilnosti ali ne pokazuju kako se identifikabilnost može proveriti. Identifikabilnost sistema i parametara zavisi od dva faktora:

1. Specifičnosti primenjenog ulaza i početnih uslova;
2. Strukture jednačina i ograničenja.

OCENE PARAMETARA MODELA STOHAŠTIČKIH SISTEMA

Kod ovakvih sistema problem se usložnjava zahtevom za uključivanje parametara pojedinih realizacija procesa. Identifikabilnost kod stohastičkih sistema zavisi od tri faktora:

1. *struktura* (stavlja parametre jedne sa drugima kao i sa ulazima i izlazima);
2. *ulaza*;
3. *procedure procene* (moraju da konvergiraju ka stvarnim vrednostima parametara – konzistentnost).

STATISTIČKI PRISTUP PROCENI PARAMETARA STATISTIČKIH MODELA

Statističke ocene parametara mogu se realizovati u prostoju sekvencijalnoj formi ili rekurzivnoj formi (za prikupljanje podataka u realnom vremenu).

Ocena srednje vrednosti slučajne promenljive

Sekvencijalni metod – pod uslovom da su svi rezultati dostupni u vreme izračunavanja, sva merenja se sabiraju i rezultat se deli sa brojem uzoraka:

$$\bar{y}_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

STATISTIČKI PRISTUP PROCENI PARAMETARA STATISTIČKIH MODELA

Rekurzivni metod – karakteristike su da se baza podataka proširuje tokom računanja i da su međurezultati dostupni i teže sekvencijalnom rešenju kako izračunavanje odmiče.

Računa se po proceduri:

$\hat{a}_0 = 0$; $\hat{a}_k = \hat{a}_{k-1} - (1/k)(\hat{a}_{k-1} - y_k)$, gde je y_k tekući uзорak
($k=1,2,\dots,N$).

OCENA NEPOZNATOG PARAMETRA PO METODI NAJMANJIH KVADRATA

Za model kod koga je veza između parametara modela i rezultata eksperimenta data relacijom:

$y_i = x_i a + e_i$ za $i = 1, 2, \dots, N$, pretpostavljajući da su x_i poznate vrednosti a e_i greške merenja, potrebno je proceniti nepoznati parametar a .

Sekvencijalno rešenje – cilj je da se minimizira odstupanje između podataka koje generiše realni sistem i podataka koji se dobijaju na osnovu modela, odnosno da se minimizira kvadrat greške:

$$J = \sum_{i=1}^N [y_i - x_i a]^2 = \sum_{i=1}^N e_i^2$$

OCENA NEPOZNATOG PARAMETRA PO METODI NAJMANJIH KVADRATA

U ovom slučaju imamo jedan nepoznat parametar, pa je $dJ/da = 0$ I dobija se

$$2 \sum_{i=1}^N [y_i - x_i a] \cdot (-x_i) = 0$$

odakle sledi

$$\left[\sum_{i=1}^N x_i^2 \right] \cdot a = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

iz čega se dobija parametar a .

OCENA NEPOZNATOG PARAMETRA PO METODI NAJMANJIH KVADRATA

Rekurzivno rešenje – uvodimo oznake: $\hat{a}_k \equiv p_k b_k$;

$$p_k = \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 \right]^{-1} \quad b_k = \sum_{i=1}^k x_i y_i$$

U rekurzivnoj formuli: $p_k = p_{k-1} - p_{k-1} x_k^2$ i $b_k = b_{k-1} + b_k y_k$,
definisanjem $k_k = p_{k-1} x_k [1 + p_{k-1} x_k^2]^{-1}$, ocena parametra a se
može izraziti kao: $\hat{a}_k = \hat{a}_{k-1} - k_k (\hat{a}_{k-1} - y_k)$.

VALIDACIJA I VERIFIKACIJA

Validacija i verifikacija su postupci kojim ispitujemo koliko verno i precizno jedan model predstavlja realni sistem. One se konceptualno razlikuju ali se najčešće simultano sprovode, odnosno kaže se da su u dinamičkoj povratnoj sprezi. *Verifikacija* se odnosi na proveru da li je simulacioni program (računarski kod) bez grešaka i konzistentan sa modelom (konceptijom). *Validacija* se odnosi na proveru da li je model precizna reprezentacija realnog sistema. To je iterativna procedura kojom se poredi ponašanje modela i realnog sistema sve dok se ne dobije tačnost modela koja zadovoljava.

VALIDACIJA I VERIFIKACIJA

UZROCI GREŠAKA KOD MODELA

- Pogrešne, nerealistične pretpostavke;
- Prevelika simplifikacija problema;
- Pogrešna matematička formulacija problema;
- Pogrešne vrednosti konstanti / ulaznih podataka;
- Obabir neadekvatne numeričke metode;
- Pogrešan redosled procedura / naredbi u algoritmu;
- Velika tolerancija u numeričkoj metodi.

VALIDACIJA I VERIFIKACIJA

Stepeni valjanosti modela

- Replikativna valjanost (najniži stepen)
 - Porede se izlazi modela i sistema
- Prediktivna valjanost
 - Model proizvodi tačne vrednosti na izlazima pre nego što se mogu izmeriti u realnom sistemu
 - Omogućava istraživanje situacija koje nisu posmatrane u sistemu
- Strukturna valjanost
 - Model u potpunosti odslikava **način** na koji realan sistem funkcioniše
 - Omogućava istraživanje operacija sistema koje se ne mogu meriti

VALIDACIJA SIMULACIONIH MODELA

Validacija je postupak kojim se određuje da li je model precizna reprezentacija realnog sistema.

Ponašanje modela se poredi sa ponašanjem realnog sistema i uočene razlike se koriste za ispravku modela.

Pri stvaranju modela unose se mnoge aproksimacije realnog sistema (zadržavaju se samo osobine originala koje su bitne). Najčešće primenjivane aproksimacije su:

VALIDACIJA SIMULACIONIH MODELA

1. **Funkcionalna aproksimacija** – nelinearne funkcije se aproksimiraju linearnim funkcijama koje moraju biti približne originalnim funkcijama u oblasti gde će sistem verovatno funkcionisati. Ako program mora funkcionisati u oblasti gde je poklapanje funkcija slabo, potrebno je da program da poruku upozorenja.
2. **Aproksimacija raspodele** – realne verovatnoće raspodela se aproksimiraju jednostavnijim raspodelama (normalna, eksponencijalna). Najekstremniji primer je kada se slučajna promenljiva zameni konstantom.
3. **Aproksimacija nezavisnosti** – model se pojednostavljuje tako što se pretpostavlja da su različite komponente (opisane slučajnim promenljivim) statistički nezavisne.

VALIDACIJA SIMULACIONIH MODELA

4. **Aproksimacija agregacije** – kada više elementata posmatramo kao jednu celinu. Primeri agregacije su:

a. Vremenska agregacija – interval vremena kao što je dan tretira se kao jedan pojedinačni period (svi događaji koji su se desili tokom dana, pretpostavlja se da su se desili istovremeno). Karakteristična je za sve diskretno – vremenske modele.

b. Među - sektorska agregacija – više odeljenja, firmi, proizvodnih linija se posmatra kao jedna celina.

c. Agregacija pomoćnih sredstava – kada više pomoćnih sredstava posmatramo kao jedno.

VALIDACIJA SIMULACIONIH MODELA

5. **Aproksimacija stacionarnosti** – činjenica da se parametri i druge karakteristike sistema ne menjaju u vremenu pojednostavljuje stvar. Za neke fizičke procese (astronomske pojave) može biti početna aproksimacija, ali za političke, ekonomske, organizacione i socijalne sisteme ona je neodrživa jer su te pojave nestacionarne prirode.

VALIDACIJA SIMULACIONIH MODELA

Cilj procesa validacije

- Da proizvede model koji predstavlja ponašanje realnog sistema i koji je dovoljno blizak realnom sistemu tako da se može koristiti za eksperimente.
- Da se pouzdanost modela poveća na prihvatljiv nivo tako da se model može koristiti za donošenje odluka.

Proces validacije se mora posmatrati kao integralni i nezamenljivi deo razvoja modela. Iterativno poređenje modela i realnog sistema se vrši pomoću različitih testova koji mogu biti subjektivni (učešće onih koji dobro poznaju sistem) i objektivni (koriste podatke o ponašanju sistema koji se obrađuju).

VALIDACIJA SIMULACIONIH MODELA

Praktični pristup procesu validacije se sastoji iz tri faze:

1. Izgraditi model koji verno predstavlja realni sistem. U izgradnji modela potrebno je da učestvuju i korisnici i ljudi koji poseduju znanja o realnom sistemu. Za proveru validnosti može se koristiti *analiza osetljivosti* (testiranje na različite ulazne veličine).

VALIDACIJA SIMULACIONIH MODELA

2. Potvrditi pretpostavke modela.

Dve kategorije: pretpostavke o *strukturi* (funkcionisanje sistema često obuhvata pojednostavljenja i apstrakcije) i pretpostavke o *podacima* (pouzdanost podataka i ispravna statistička analiza: 1. identifikacija raspodela podataka; 2. procena parametara raspodele; 3. validacija statističkog modela nekim testom: χ^2 , Kolmogorov – Smirof test).

3. Poređenje (validacija) ulazno – izlaznih transformacija modela i realnog sistema. Najobjektivniji test modela je provera sposobnosti modela da predvidi buduće ponašanje realnog sistema.

Formalni kriterijum za utvrđivanje validnosti modela

Realni sistem treba posmatrati kao sistem na višem nivou a model kao sistem na nižem nivou.

Homomorfizam (*gr. homo* - sličan, *morph* - struktura) je formalni kriterijum za utvrđivanje validnosti modela za date eksperimentalne uslove. Radi jednostavnosti izlaganja ograničićemo se na dokazivanje validnosti diskretnih vremenskih modela. Suština formalnog postupka za proveru validnosti je u tome da se nađe preslikavanje H pomoću kog je moguće iz svakog stanja osnovnog modela s preći u odgovarajuće stanje uprošćenog modela s' . Ako ovakvo preslikavanje postoji, tada se zaključuje da su ulazno – izlazna ponašanja osnovnog i uprošćenog modela ista za date eksperimentalne uslove.

Formalni kriterijum za utvrđivanje validnosti modela

Da bi se utvrdio homomorfizam, moraju biti ispunjeni sledeći uslovi:

1. Očuvanje funkcije nastupanja vremena

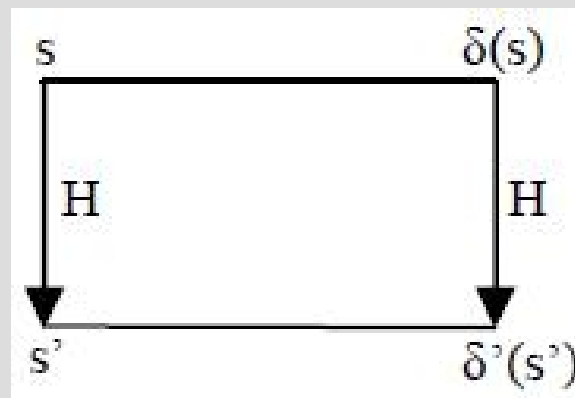
Stanja s i s' moraju imati istu funkciju nastupanja vremena, odnosno da se menjaju u istim vremenskim trenucima.

Formalni kriterijum za utvrđivanje validnosti modela

2. Očuvanje funkcije prelaza stanja

Ako stanju s odgovara stanje s' primenom preslikavanja H , onda i sledeća stanja u koja će model preći u narednom trenutku posmatranja moraju odgovarati jedno drugom. Sledeće stanje osnovnog modela će biti $\delta(s)$ a uprošćenog modela $\delta'(s')$, što znači da primenom preslikavanja H na stanje $\delta(s)$ treba da se dobije stanje $\delta'(s')$.

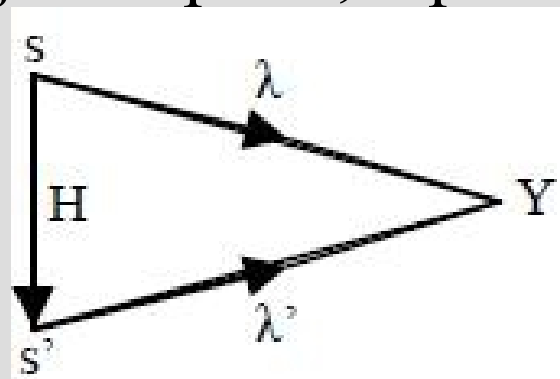
Grafički se može predstaviti preko komutativnog dijagrama.



Formalni kriterijum za utvrđivanje validnosti modela

3. Očuvanje izlazne funkcije

Primena izlazne funkcije osnovnog modela λ (za one eksperimentalne uslove za koje je izvršeno uprošćavanje da bi se dobio uprošćeni model za stanje s) daje isti izlaz Y kao i primena izlazne funkcije uprošćenog modela λ' na stanje s' . Uočava se da se validnost uprošćenog modela utvrđuje i u odnosu na zadate eksperimentalne uslove. Ako je preslikavanje H tip 1:1, u pitanju je izomorfizam.



Formalni kriterijum za utvrđivanje validnosti modela

Ako su zadovoljeni svi prethodno definisani uslovi onda je uprošćeni model validan u odnosu na osnovni model za date eksperimentalne uslove.

Kontrolna pitanja

32. Šta je ocena parametara modela?
33. Od čega zavisi struktura algoritma za ocenu parametara modela?
34. Od čega zavisi identifikabilnost kod stohastičkih sistema?
35. Kojim metodama se mogu dobiti ocene srednje vrednosti slučajne promenljive?
36. Šta su validacija i verifikacija?
37. Navedite uzroke grešaka kod modela.
38. Navedite stepene valjanosti modela.
39. Koje se aproksimacije najčešće primenjuju u procesu stvaranja modela?

Kontrolna pitanja

40. Šta je funkcionalna aproksimacija?
41. Šta je aproksimacija raspodele?
42. Šta je aproksimacija agregacije?
43. Šta je aproksimacija stacionarnosti?
44. Šta je cilj procesa validacije?